Curs 10

4. Statica sistemelor de corpuri

4.1 **Legăturile sistemelor de corpuri**

În cazul sistemelor de corpuri avem două tipuri de legături:

- legături exterioare care leagă sistemul de corpuri de corpurile de reazem, care sunt considerate fixe și nu fac parte din sistemul de corpuri dat.
  Acestea sunt de tip reazem simplu, articulație sferică sau cilindrică și încastrare spațială sau plană. Legăturile exterioare pot fi lucii sau aspre, iar lor le corespund forțe de legătură (reacțiuni) exterioare.
- legături interioare care sunt legături între corpurile sistemului. Acestea sunt de tip reazem simplu sau articulație sferică sau cilindrică. Ele pot fi lucii sau aspre. Dacă două corpuri sunt încastrate între ele, atunci ele se pot considera un singur corp.
  Legăturilor interioare le corespund forțe de legătură (reacțiuni) interioare. Acestea sunt perechi de forțe egale și direct opuse $\vec{\mathcal{R}}_{ij} = -\vec{\mathcal{R}}_{ji}$

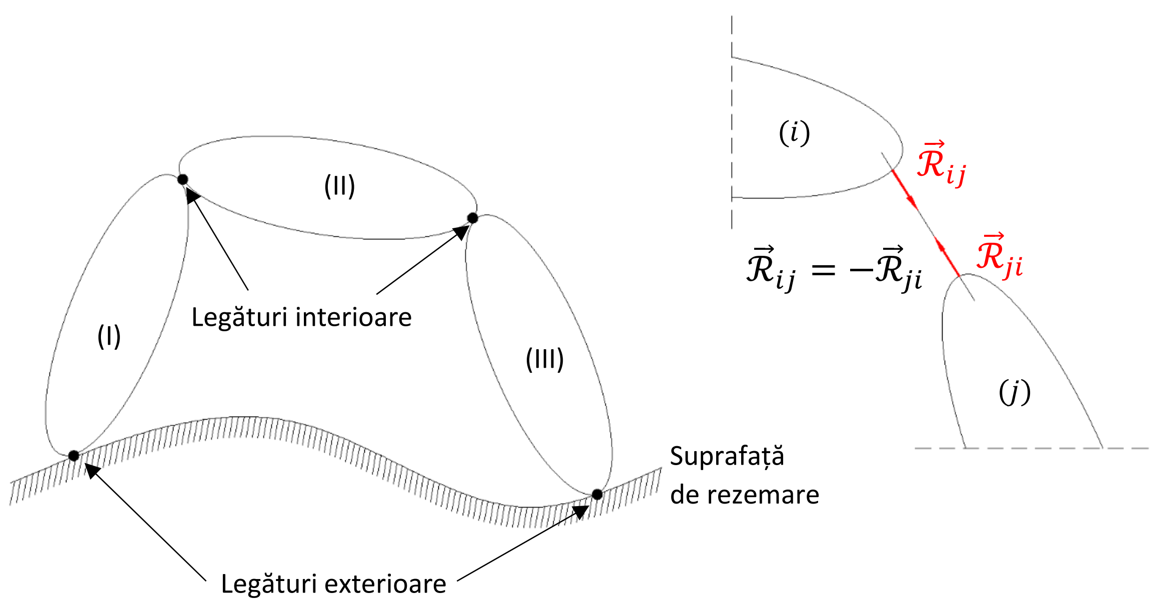


Figura 1 - Legături într-un sistem de corpuri

4.2 Grade de libertate

Un sistem de corpuri are **m** grade de libertate. Dacă echilibrul sistemului se stabilește în spațiu atunci:

$$\mathrm{m} = 6\mathrm{C} - (l_i + l_e), \qquad (1)$$

iar dacă echilibrul sistemului se stabilește în plan, atunci:

$$\mathrm{m} = 3\mathrm{C} - (l_i + l_e), \qquad (2)$$

în care C este reprezintă numărul de corpuri din sistem,
l_i reprezintă numărul gradelor de libertate suprimate de legăturile interioare,
l_e reprezintă numărul gradelor de libertate suprimate de legăturile exterioare.

Dacă m=0, sistemul de corpuri nu mai are grade de libertate, el este fixat cu numărul minim de legături și se numește **static determinat.**
Dacă m>0, sistemul de corpuri mai are grade de libertate, el nu este fixat și se numește **mecanism.**
Dacă m<0, sistemul de corpuri nu mai are grade de libertate, el este fixat cu un număr mai mare de legături decât cel minim și se numește **static nedeterminat.** Aceste sisteme nu fac obiectul studiului mecanicii.

4.3 **Problema fundamentală a staticii sistemelor de corpuri:**

Problema fundamentală a staticii sistemelor de corpuri este următoarea**:**
Se dă sistemul de corpuri, sistemul de forțe care acționează pe el și legăturile la care este supus. Se cere:

a) dacă m>0, să se determine parametri care determină poziția (pozițiile) sa de echilibru și reacțiunile legăturilor,
b) dacă m=0, să se determine reacțiunile legăturilor. Poziția de echilibru a sistemului este dată de legături și nu depinde de forțele exterioare.

Rezolvarea problemei fundamentale a staticii CSR legat

4.4. Metode de rezolvare ale problemei fundamentale a staticii sistemelor de corpuri

Toate metodele de rezolvare enunțate mai jos se bazează pe teorema echilibrului parților.

4.4.1 **Teorema echilibrului parților**

Dacă un sistem material este în echilibru , atunci orice parte a sa este în echilibru, sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor exterioare și interioare aferente ei.

4.4.2. **Metoda izolării corpurilor**

În această metodă se consideră ca parte fiecare corp din sistem. Astfel, conform teoremei echilibrului parților dacă sistemul de corpuri este în echilibru , atunci fiecare corp din sistem este în echilibru, sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor exterioare și interioare aferente lui.

Se izolează fiecare corp al sistemului, se introduc forțele exterioare și reacțiunile exterioare și interioare.

Se aplică teorema fundamentală staticii și se scriu ecuațiile scalare de echilibru. Astfel , pentru fiecare corp se scriu 6 ecuații de echilibru în spațiu sau 3 ecuații de echilibru în plan.

Se obține un sistem de 6C ecuații de echilibru în spațiu cu 6C necunoscute sau 3C ecuații de echilibru în plan cu 3C necunoscute.

Se rezolvă sistemul de ecuații și se află necunoscutele problemei.

4.4.3. **Metoda solidificării sau a echilibrului întregului sistem**

În aceasta metodă se consideră ca parte, întreg sistemul de corpuri care se eliberează numai de legăturile exterioare.

Se aplică teorema fundamentală staticii și se scriu ecuațiile scalare de echilibru. Astfel, se scriu 6 ecuații de echilibru în spațiu sau 3 ecuații de echilibru în plan.

Se obține un sistem de 6 ecuații de echilibru în spațiu, sau 3 ecuații de echilibru în plan. Numărul de necunoscute este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru, de aceea această metodă trebuie combinată cu metoda izolării corpurilor.

Se rezolvă sistemul de ecuații și se află necunoscutele problemei.

4.4.4. **Metoda echilibrului parților**

În această metodă sistemul de corpuri se împarte în parți formate din unul sau mai multe corpuri. Se aplică teorema fundamentală staticii și se scriu ecuațiile scalare de echilibru pentru fiecare parte. Astfel, se scriu 6P ecuații de echilibru în spațiu sau 3P ecuații de echilibru în plan. P este numărul de parți în care s-a împărțit sistemul.

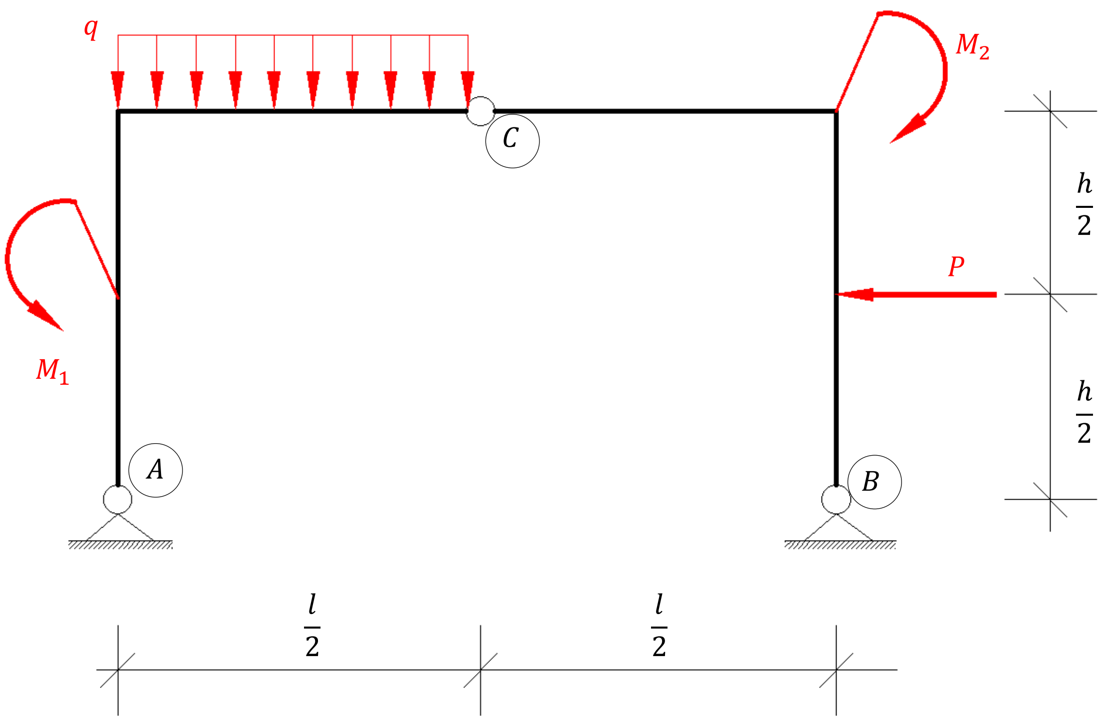
Se obține un sistem de 6P ecuații de echilibru în spațiu, sau 3P ecuații de echilibru în plan.

Modul de alegere al parților trebuie astfel făcut încât din anumite ecuații să se determine anumite necunoscute, care să fie folosite în ecuațiile de echilibru ale celorlalte parți.

4.5 Exemple de calcul

4.5.1 Metoda izolării corpurilor

Pentru sistemul de corpuri (cadru cu trei articulații) din figură se cere să se determine valorile forțelor de legătura interioare și exterioare.



Sistemul de corpuri este format din 2 corpuri: AC și BC. În punctele A, B și C avem articulații plane. În fiecare articulație avem 2 legături simple (penduli), rezultând o structură static determinată – numărul gradelor de libertate este zero.

$$\mathrm{m} = 3\mathrm{C} - (l_i + l_e)$$

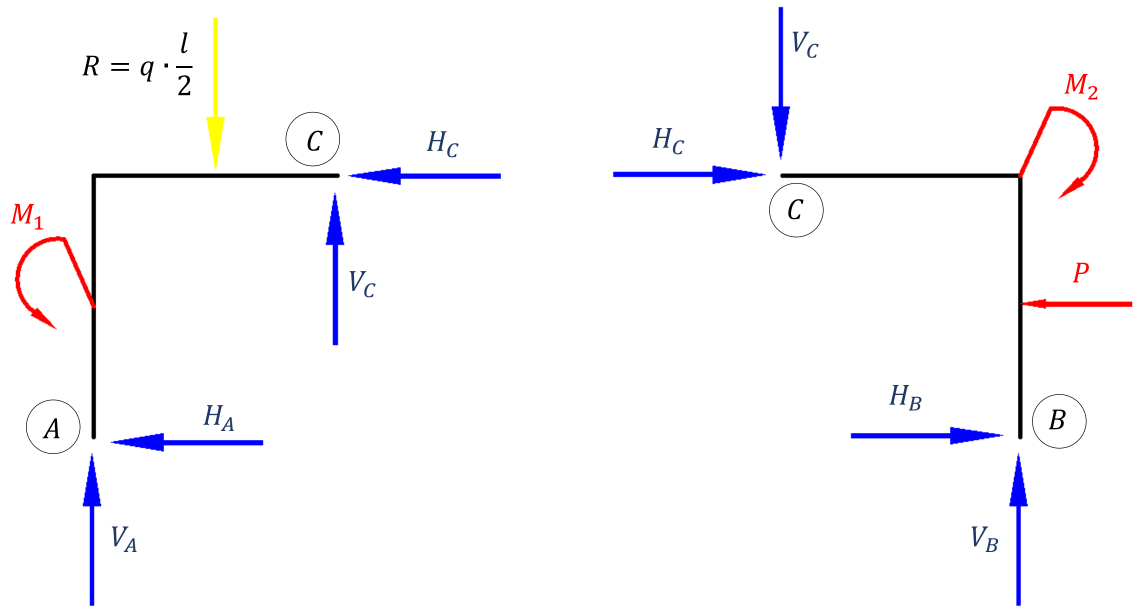
$$m = 3 \cdot 2 - (2 \cdot 2 + 2) = 0$$

Se izolează corpurile; se eliberează de legături (interioare si exterioare) și se figurează forțele de legătura (reacțiunile) din legături. Sensul acestor forțe nu este obligatoriu să-l figurăm în sensul real de acțiune al reacțiunii; putem să stabilim un sens arbitrar pentru fiecare reacțiune, iar după rezolvarea numerică a sistemului de ecuații o să rezulte sensul real (dacă valoarea unei reacțiuni o să aibă semnul “+”

înseamnă că sensul real al reacțiunii este cel figurat de noi în prima fază; dacă rezultatul numeric este negativ, înseamnă că sensul real este invers, dar valoarea numerică, în modul, este corectă).

Observație!

Atenție la sensul reacțiunilor din legăturile interioare. Ele acționează întotdeauna pe AMBELE corpuri, dar în sens opus – dacă "unificăm" corpurile la loc și ajungem la configurația inițială, aceste forte de legătură trebuie să se anuleze reciproc una pe cealaltă.



Ecuațiile de echilibru pentru primul corp (AC) sunt:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -H_A - H_C = 0 \\ V_A - R + V_C = 0 \\ M_1 - R \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} + V_C \cdot \frac{l}{2} + H_c \cdot h = 0 \end{cases}$$

Iar pentru al doilea corp (BC) sunt:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_C + H_B - P = 0 \\ -V_C + V_B = 0 \\ -H_c \cdot h + V_C \cdot \dfrac{l}{2} - M_2 + P \cdot \dfrac{h}{2} = 0 \end{cases}$$

Acest sistem de ecuații de echilibru se cuplează și se rezolvă. Avem 6 ecuații cu 6 necunoscute, deci d.p.d.v. matematic problema este rezolvabilă.

$$\begin{cases} -H_A - H_C = 0 \\ V_A - R + V_C = 0 \\ M_1 - R \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{l}{2} + V_C \cdot \dfrac{l}{2} + H_c \cdot h = 0 \\ H_C + H_B - P = 0 \\ -V_C + V_B = 0 \\ -H_c \cdot h + V_C \cdot \dfrac{l}{2} - M_2 + P \cdot \dfrac{h}{2} = 0 \end{cases}$$

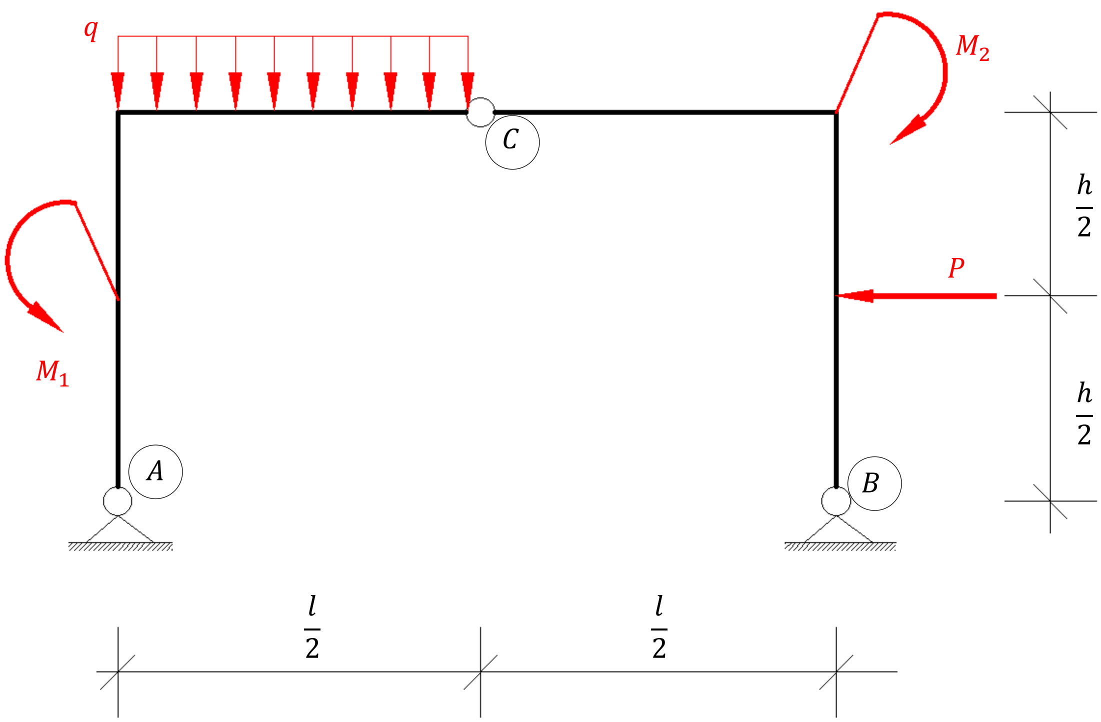
Dacă se decuplează cele două ecuații de sumă de momente în raport cu punctele A respectiv B, rezolvarea întregului sistem de 6 ecuații se reduce la un sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute (H_C, V_C), iar după determinarea lor se determină valorile celorlalte reacțiuni (fiecare ecuație se reduce la o ecuație de gradul I).

Observație!

Ecuația de suma de momente se poate scrie în raport cu ORICE punct – am ales punctele A și B pentru a simplifica rezolvarea numerică a sistemului de ecuații.

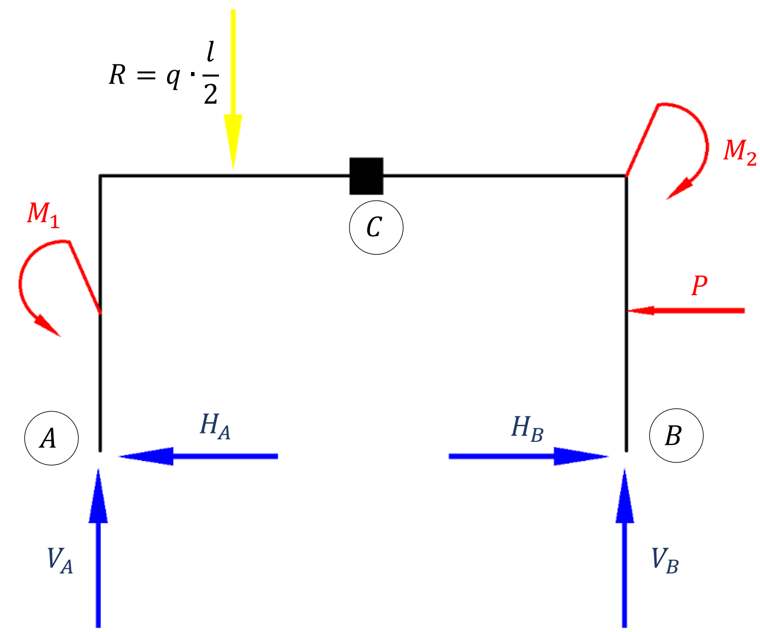
4.5.2 Metoda solidificării sau a echilibrului întregului sistem

Pentru aplicația anterioară se cer DOAR forțele de legătură exterioare. Metoda solidificării nu ne permite determinarea valorilor reacțiunilor interioare ale sistemului de corpuri.



Astfel , articulația intermediară din punctul C dispare, astfel ca avem un singur corp.

Datorită particularității problemei (reazemele A și B sunt pe aceeași linie orizontală) se pot determina forțele de legătură (reacțiunile), însă doar cele VERTICALE. Dacă reazemele sunt decalate, metoda nu este aplicabilă pentru determinarea reacțiunilor exterioare sistemului.



Numărul gradelor de libertate:

$$\mathrm{m} = 3\mathrm{C} - (l_i + l_e)$$

$$m = 3 \cdot 1 - (2 + 2) = -1 \implies$$

structură static nedeterminată

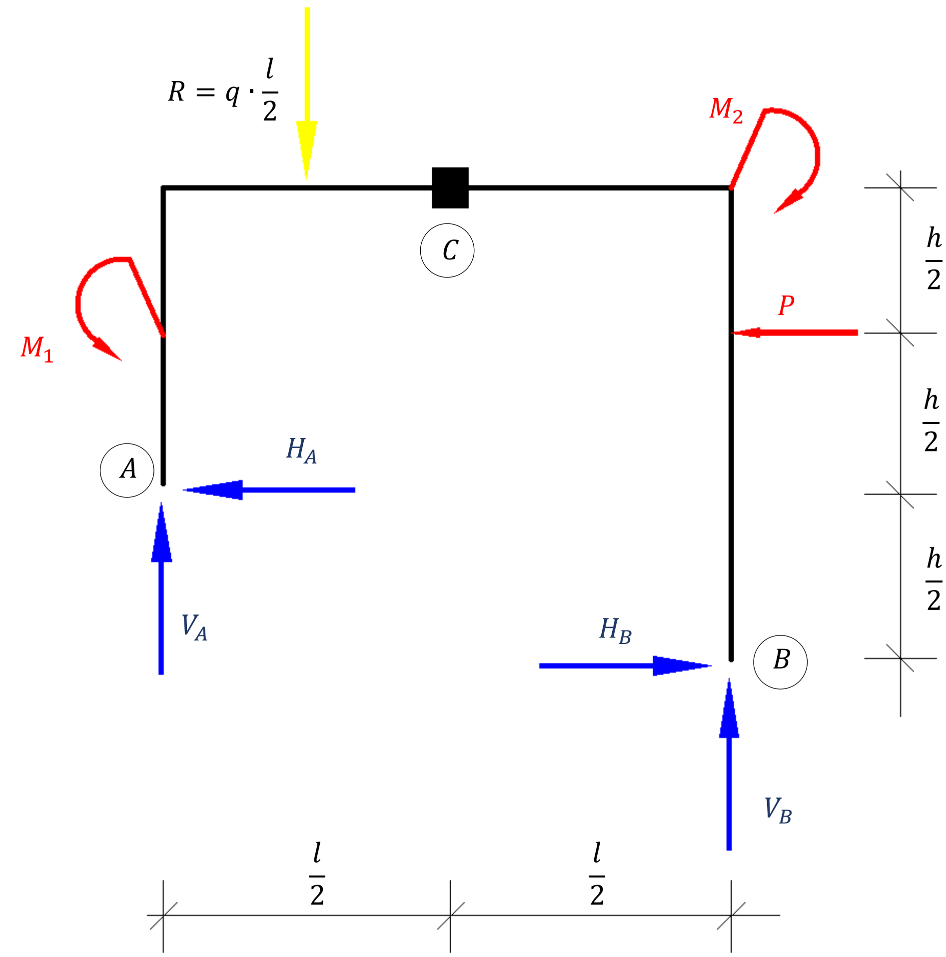
Ecuațiile de echilibru sunt:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -H_A + H_B - P = 0 \; (ecuatie\ nefolositoare) \\ V_A + V_B - R = 0 \\ -V_A \cdot l + M_1 + R \cdot \left(\frac{l}{4} + \frac{l}{2}\right) - M_2 + P \cdot \frac{h}{2} = 0 \end{cases}$$

Putem concluziona că doar ultimele două ecuații ne conduc la determinarea valorilor reacțiunilor verticale. Celelalte reacțiuni (cele orizontale) nu se pot determina utilizând doar metoda solidificării. Se poate observa, de la început, că avem un sistem format din 3 ecuații cu 4 necunoscute.

Dacă reazemele A și B sunt decalate nu se mai pot determina nici reacțiunile verticale.

În unele cazuri este avantajos sa utilizam ambele metode, succesiv, pentru a determina valorile reacțiunilor (interioare sau/și exterioare).

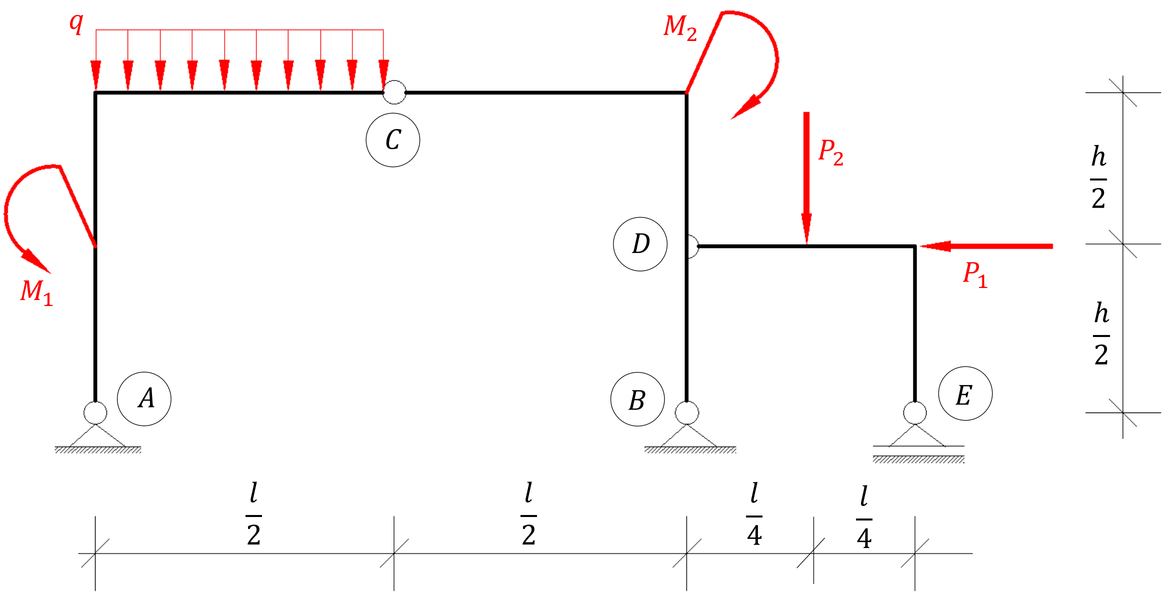


Ecuațiile de echilibru sunt:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -H_A + H_B - P = 0 \\ V_A + V_B - R = 0 \\ -V_A \cdot l + H_A \cdot \frac{h}{2} + M_1 + R \cdot \left(\frac{l}{4} + \frac{l}{2}\right) - M_2 + P \cdot h = 0 \end{cases}$$

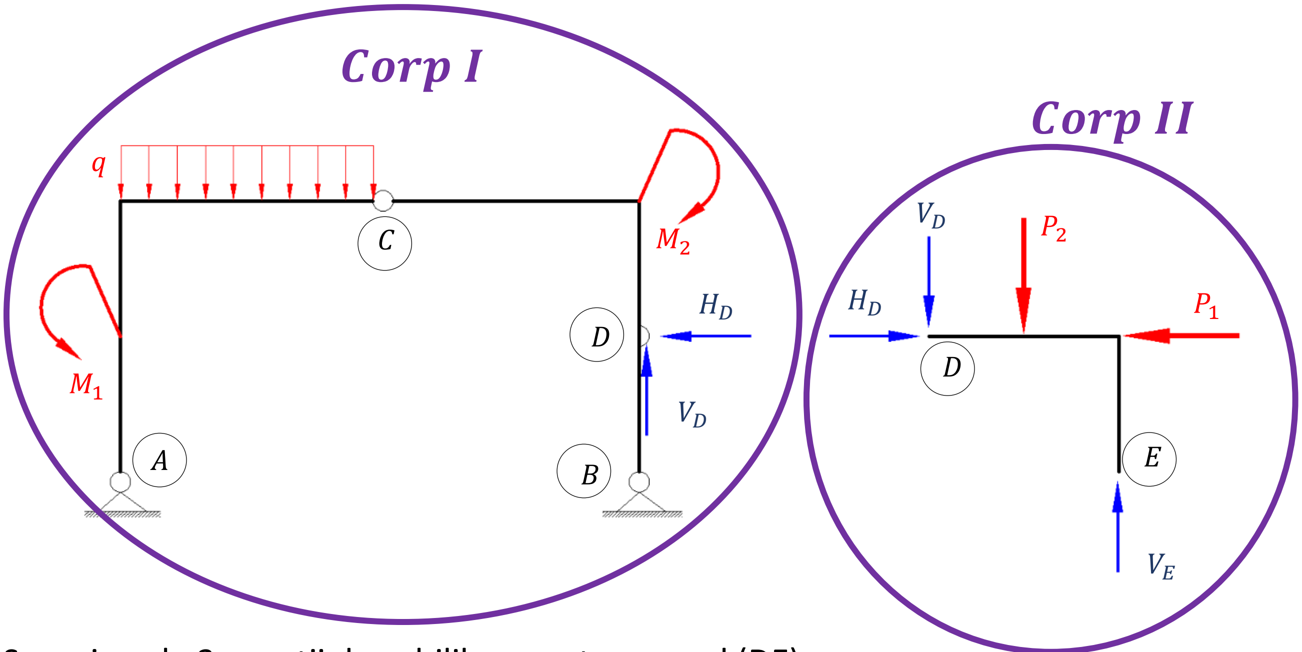
4.5.3 Metoda echilibrului parților

Pentru sistemul de corpuri din figură se cere să determine reacțiunea din reazemul E.



Dacă am folosi metoda izolării corpurilor o să ne rezulte un sistem de 9 ecuații cu 9 necunoscute.

Dacă considerăm corpul DE este în echilibru față de celelalte corpuri, sub acțiunea forțelor exterioare și a celor de legătură (interioare și exterioare), atunci putem scrie o singură ecuație de echilibru pe structură pentru a determina valoarea reacțiunii din punctul E (reazem simplu):



Se scriu cele 3 ecuații de echilibru pentru corpul (DE) :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_D - P_1 = 0 \\ V_E - V_D - P_2 = 0 \\ -P_2 \cdot \dfrac{l}{4} + V_E \cdot \dfrac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

Din ultima ecuație se poate determina direct valoarea lui V_E.